

# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

## Основные формулы

### 1 Длина волны де Бройля

а) в классическом приближении ( $v \ll c$ )

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2W_k m}}$$

б) в релятивистском случае ( $v \sim c$ )

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

### 2 Энергия микрочастицы

$$E = mc^2 \quad \text{или} \quad E = h\nu = \hbar\omega$$

### 3 Импульс микрочастицы

$$p = mv \quad \text{или} \quad p = h/\lambda, \quad \text{или} \quad p = \hbar \cdot k = \hbar \cdot 2\pi / \lambda$$

### 4 Связь энергии и импульса микрочастицы

а) в классическом приближении ( $v \ll c$ )

$$p = \sqrt{2m_0 W_k}$$

б) в релятивистском случае ( $v \sim c$ )

$$p = \frac{\sqrt{(2m_0 c^2 + W_k) W_k}}{c},$$

### 5 Соотношение неопределенностей

а) для координат и импульса

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar \end{cases}$$

б) для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

## 6 Общее уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z) \Psi$$

## 7 Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

## 8 Плотность вероятности обнаружения микрочастицы в элементе объёма $dV$

$$dw = \frac{dW}{dV} = |\psi(x, y, z)|^2$$

## 9 Условие нормировки волновой функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Найти длину волны де Бройля  $\lambda$  для двух случаев: 1)  $U=51$  В; 2)  $U=510$  кВ.

*Дано:*

$$v_0=0$$

$$1) U=51 \text{ В}$$

$$2) U=510 \text{ кВ}$$

$$\lambda_1 - ? \quad \lambda_2 - ?$$

*Решение:* Длина волны де Бройля для микрочастицы зависит от ее импульса  $p$  и определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (12.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия  $W_k$ . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0 W_k}, \quad (12.2)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

В релятивистском случае

$$p = \frac{\sqrt{(2E_0 + W_k)W_k}}{c}, \quad (12.3)$$

где  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя частицы.

Формула (12.1) с учетом соотношений (12.2) и (12.3) запишется:

1) в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 W_k}}, \quad (12.4)$$

2) в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + W_k)W_k}}. \quad (12.5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов  $U=51$  В и  $U=510$  кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (12.4) или (12.5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ , равна:

$$W_k = e U.$$

В первом случае  $W_{k1} = eU_1 = 51$  эВ  $= 0,51 \cdot 10^{-4}$  МэВ, что много меньше энергии покоя электрона  $E_0 = m_0 c^2 = 0,51$  МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (3.18). Для упрощения расчетов заметим, что  $W_{k1} = 10^{-4} m_0 c^2$ . Подставив это выражение в формулу (12.4), перепишем ее в виде:

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} \cdot m_0 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{h}{m_0 \cdot c}. \quad (12.6)$$

Проверим единицы:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \text{м}$$

Подставим в формулу (12.6) числовые значения, воспользовавшись таблицей 1, и произведём расчёты:

$$\lambda_1 = \frac{10^2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м} = 0,172 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 172 \text{ пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия  $W_{к2} = eU_2 = 510 \text{ кэВ} = 0,51 \text{ МэВ}$ , то- есть равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (12.5). Учитывая, что  $W_{к2} = 0,51 \text{ МэВ} = m_0 c^2$ , по формуле (12.5) находим:

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{(2m_0 c^2 + m_0 c^2) \frac{m_0 c^2}{c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{3} m_0 c}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$\lambda_2 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м} = 1,40 \text{ пм}.$$

Ответ:  $\lambda_1 = 171 \text{ пм}$ ,  $\lambda_2 = 1,40 \text{ пм}$ .

**Задача 2.** Кинетическая энергия  $W_k$  электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

*Дано:*

$$W_k = 10 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$$

$l_{\min} - ?$

*Решение:* Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (12.7)$$

где  $\Delta x$ - неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона);

$\Delta p$  - неопределенность импульса частицы (электрона);

$\hbar$  - постоянная Планка  $h$ , деленная на  $2\pi$ .

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры  $l$ , тогда электрон атома будет находиться где-то пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l / 2 \quad (12.8)$$

Соотношение неопределенностей (12.7) можно записать в этом случае в виде

$$\frac{l}{2} \Delta p \geq \hbar,$$

откуда

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p}. \quad (12.9)$$

Физически разумная неопределенность импульса  $\Delta p$ , во всяком случае не должна превышать значения самого импульса  $p$ , т.е.  $\Delta p \leq p$ . Согласно выражению (12.9)  $l$  достигает минимального значения, если  $\Delta p$  максимально, т.е.  $\Delta p = p$ . Таким образом

$$l_{\min} = 2\hbar / p$$

Импульс  $p$  связан с кинетической энергией  $W_k$  соотношением

$$p = \sqrt{2mW_k},$$

следовательно:

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_k}}.$$

$$(12.10)$$

Проверим единицы физических величин в формуле (12.10):

$$[l_{\min}] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг}} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг}} \cdot \sqrt{\text{кг}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \text{м}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-18}}} \text{ м} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ пм}.$$

Ответ:  $l_{\min} = 124 \text{ пм}$

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

**Таблица 1. Основные физические постоянные (округленные значения)**

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	$g$	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	$G$	6,67·10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /(кг·с <sup>2</sup> )
Число Авогадро	$N_A$	6,02·10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k$	1,38·10 <sup>-23</sup> Дж/К
Элементарный заряд	$e$	1,60·10 <sup>-19</sup> Кл
Скорость света в вакууме	$c$	3,00·10 <sup>8</sup> м/с
Масса покоя электрона	$m_e$	9,1·10 <sup>-31</sup> кг
Масса покоя протона	$m_p$	1,67·10 <sup>-27</sup> кг
Нормальные условия: давление	$P$	1,01·10 <sup>5</sup> Па
температура	$T$	273 К
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	8,85·10 <sup>-12</sup> Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0$	4π·10 <sup>-7</sup> Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	5,67·10 <sup>-8</sup> $\frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$
Постоянная Вина (первый закон)	$b$	2,9 · 10 <sup>-3</sup> м·К
Постоянная Вина (второй закон)	$c$	1,3 · 10 <sup>-5</sup> Вт/(м <sup>3</sup> ·К <sup>5</sup> )
Постоянная Планка	$h$	6,63·10 <sup>-34</sup> Дж·с
	$\hbar$	1,05·10 <sup>-34</sup> Дж·с
Постоянная Ридберга	$R$	1,1·10 <sup>7</sup> м <sup>-1</sup>
	$R'$	3,3·10 <sup>15</sup> с <sup>-1</sup>
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	2,18·10 <sup>-18</sup> Дж (13,6эВ)
Атомная единица массы	$1a.e.m$	1,660·10 <sup>-27</sup> кг
Радиус Бора	$a_0$	0,529·10 <sup>-10</sup> м
Модуль Юнга для стали	$E$	0,2 ТПа

**Таблица 2. Плотность твердых тел**

Твердое тело	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Твердое тело	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Твердое тело	Плотность кг/м <sup>3</sup>
Алюминий	2,70·10 <sup>3</sup>	Железо	7,88·10 <sup>3</sup>	Свинец	11,3·10 <sup>3</sup>
Барий	3,50·10 <sup>3</sup>	Литий	0,53·10 <sup>3</sup>	Серебро	10,5·10 <sup>3</sup>
Ванадий	6,02·10 <sup>3</sup>	Медь	8,93·10 <sup>3</sup>	Цезий	1,90·10 <sup>3</sup>
Висмут	9,80·10 <sup>3</sup>	Никель	8,90·10 <sup>3</sup>	Цинк	7,15·10 <sup>3</sup>
Латунь	8,4·10 <sup>3</sup>	Сталь	7,70·10 <sup>3</sup>	Фарфор	2,3·10 <sup>3</sup>

Таблица 3. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Жидкость	Плотность кг/м <sup>3</sup>
Вода (при 4 °С)	1,00·10 <sup>3</sup>	Серовуглерод	1,26·10 <sup>3</sup>
Глицерин	1,26·10 <sup>3</sup>	Спирт	0,80·10 <sup>3</sup>
Ртуть	13,6·10 <sup>3</sup>	Касторовое масло	0,9·10 <sup>3</sup>
Машинное масло	0,9·10 <sup>3</sup>	Нефть	0,85·10 <sup>3</sup>

Таблица 4. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Газ	Плотность кг/м <sup>3</sup>
Аргон	1,78	Гелий	0,18
Водород	0,09	Кислород	1,43
Воздух	1,29	Азот	1,25

Таблица 5. Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d 10 <sup>10</sup> , м	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность α, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,27	17,2	24,1
Гелий	0,22	18,9	142
Кислород	0,29	19,8	24,4
Пары воды	0,30	8,32	15,8

Таблица 6. Динамическая вязкость η жидкостей при 20 °С

Вещество	Динамическая вязкость η, мПа·с	Вещество	Динамическая вязкость η, мПа·с
Вода	1,00	Масло машинное	100
Глицерин	1480	Ртуть	1,58
Масло касторовое	987		

Таблица 7. Молярные массы некоторых газов

Газ	Молярная масса $\mu \cdot 10^3$ , кг/моль	Газ	Молярная масса $\mu \cdot 10^3$ , кг/моль
Гелий	4	Углерод	24
Аргон	40	Азот	28
Неон	20	Воздух	29
Водород	2	Пары воды	18
Кислород	32		

Таблица 8. Удельная теплоемкость

Вещество	Удельная теплоемкость с, Дж/(кг·К)	Вещество	Удельная теплоемкость с, Дж/(кг·К)
Вода	4190	Нихром	220
Лед	2100	свинец	126

Таблица 9. Удельная теплота плавления

Вещество	Удельная теплота плавления $\lambda$ , Дж/кг
Лед	$33,5 \cdot 10^4$
Свинец	$2,3 \cdot 10^4$

Таблица 10. Удельная теплота парообразования

Вещество	Удельная теплота парообразования $r$ , Дж/кг
Вода	$22,5 \cdot 10^5$
Эфир	$6,68 \cdot 10^5$

Таблица 11. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Парафин	2,0	Вода	81
Стекло	7,0	Масло трансформаторное	2,2

Таблица 12. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление металлов, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление металлов, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Медь	$1,72 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Никелин	$4 \cdot 10^{-7}$		

Таблица 13. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

Таблица 14. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	$m_0$		$E_0$	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
$\alpha$ -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный мезон $\pi$ -	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблица 15. Работа выхода электронов

Металл	Дж	эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Таблица 16. Относительные атомные массы (атомные веса)  $A$  и порядковые номера  $Z$  некоторых элементов

Элемент	Химический символ	$A$	$Z$
Азот	N	14	7
Алюминий	Al	27	13
Водород	H	1	1
Вольфрам	W	184	74
Гелий	He	4	2
Железо	Fe	56	26
Золото	Au	197	79
Калий	K	39	19
Кальций	Ca	40	20
Кислород	O	16	8
Магний	Mg	24	12
Марганец	Mn	55	25
Медь	Cu	64	29
Молибден	Mo	96	42
Натрий	Na	23	11
Никель	Ni	59	28
Платина	Pt	195	78
Сера	S	32	16
Серебро	Ag	108	47
Уран	U	238	92
Углерод	C	12	6
Хлор	Cl	35	17

Таблица 17. Периоды полураспада радиоактивных изотопов.

Изотоп	Символ	Период полураспада
Магний	${}_{12}\text{Mg}^{27}$	10 мин
Фосфор	${}_{15}\text{P}^{32}$	14,3 суток
Кобальт	${}_{27}\text{Co}^{60}$	5,3 года
Стронций	${}_{38}\text{Sr}^{90}$	27 лет
Йод	${}_{53}\text{I}^{131}$	8 суток
Актиний	${}_{89}\text{Ac}^{225}$	10 суток
Торий	${}_{90}\text{Th}^{229}$	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	${}_{92}\text{U}^{238}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Радий	${}_{88}\text{Ra}^{219}$	$10^{-3}$ сек
	${}_{88}\text{Ra}^{226}$	$1,62 \cdot 10^3$ лет

Таблица 18. Массы нейтрона и некоторых атомов

Изотоп	Символ	Масса (а.е.м)
Нейтрон	${}_0n^1$	1,00867
Водород	${}_1H^1$	1,00783
	${}_1H^2$	2,01410
	${}_1H^3$	3,01605
Гелий	${}_2He^3$	3,01603
	${}_2He^4$	4,00260
Литий	${}_3Li^6$	6,01513
	${}_3Li^7$	7,01601
Бериллий	${}_4Be^7$	7,01693
	${}_4Be^9$	9,01219
Бор	${}_5B^{10}$	10,01294
	${}_5B^{11}$	11,00930
Углерод	${}_6C^{12}$	12,00000
	${}_6C^{13}$	13,00335
	${}_6C^{14}$	14,00324
Азот	${}_7N^{14}$	14,00307
Кислород	${}_8O^{16}$	15,99491
	${}_8O^{17}$	16,99913
Магний	${}_{12}Mg^{23}$	22,99414

Таблица 19. внесистемные единицы, допущенные к применению наравне с единицами СИ, их связь с единицами СИ

Наименование величины	Единица		
	Название	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	$1\text{т} = 10^3 \text{ кг}$
	атомная единица массы	а.е.м.	$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Время	минута	мин	$1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$
	час	ч	$1\text{ч} = 3600 \text{ с}$
	сутки	сут	$1 \text{ сут} = 86400 \text{ с}$
	год	год	$1 \text{ год} = 365,25 \text{ сут} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$
Работа, энергия	электрон -вольт	эВ	$1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Таблица 20. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$

Таблица 21. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пэта	П	$10^{15}$	санتي	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	милли	м	$10^{-3}$
гига	Г	$10^9$	микро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кило	к	$10^3$	пико	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$